

Απροσδιόριστη μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$ ρητής συνάρτησης:

Κάποιες φορές η αντικατάσταση με το x_0 δίνει αποτέλεσμα $\frac{0}{0}$, το οποίο είναι

απροσδιόριστο. Για να καταφέρουμε να υπολογίσουμε το όριο πρέπει να άρουμε την απροσδιοριστία. Η μεθοδολογία για να το επιτύχουμε είναι η εξής.

- Αν στην απροσδιοριστία μας οδήγησε **ρητή** συνάρτηση (δηλαδή πηλίκο

πολυωνύμων $\frac{P(x)}{Q(x)}$) τότε:

- 1) Τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ έχουν ρίζα το x_0 , οπότε θα έχουν παράγοντα τον $(x-x_0)$, δηλαδή θα παραγοντοποιούνται ως: $P(x)=(x-x_0)\Pi_1(x)$ και $Q(x)=(x-x_0)\Pi_2(x)$. (Η παραγοντοποίηση μπορεί να γίνεται με προφανή τρόπο, κατά ομάδες, με χρήση γνωστής ταυτότητας, παραγοντοποίηση τριωνύμου ή σχήμα Horner.)
- 2) Αφού παραγοντοποιήσουμε τα δύο πολυώνυμα, απλοποιούμε τον κοινό παράγοντα $(x-x_0)$ και επιχειρούμε να υπολογίσουμε ξανά το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cancel{(x-x_0)}\Pi_1(x)}{\cancel{(x-x_0)}\Pi_2(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Pi_1(x)}{\Pi_2(x)} = \frac{\Pi_1(x_0)}{\Pi_2(x_0)}$$

με αντικατάσταση.

- 3) Αν καταλήξουμε ξανά σε απροσδιοριστία επαναλαμβάνουμε τα παραπάνω βήματα.

Ασκήσεις:

- Με απλές μεθόδους παραγοντοποίησης:

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3^2}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{x\cancel{(x-3)}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x} = \frac{3+3}{3} = 2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^3 - 8} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2(x+2) - 4(x+2)}{x^3 - 2^3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x^2 - 4)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} =$$
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x^2 + 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)^2}{x^2 + 2x + 4} = \frac{(2+2)^2}{2^2 + 2 \cdot 2 + 4} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

- Με παραγοντοποίηση τριωνύμου και σχήμα Horner:

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 - 3x + 2}$$

Παρατηρούμε ότι πρόκειται για απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Το τριώνυμο του αριθμητή έχει διακρίνουσα: $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2(-5) = 9 + 40 = 49$ και ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 7}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{-3-7}{4} = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2} \\ x_2 = \frac{-3+7}{4} = \frac{4}{4} = 1 \end{cases}$$

Επειδή, από τη θεωρία, γνωρίζουμε ότι ένα τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$ με ρίζες x_1 και x_2 παραγοντοποιείται ως: $ax^2 + bx + \gamma = a(x-x_1)(x-x_2)$, θα είναι:

$$2x^2 + 3x - 5 = 2\left(x + \frac{5}{2}\right)(x-1)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία παραγοντοποιούμε το τριώνυμο του

παρονομαστή και βρίσκουμε: $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 - 3x + 2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\left(x + \frac{5}{2}\right)\cancel{(x-1)}}{(x-2)\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+5}{x-2} = \frac{2 \cdot 1 + 5}{1-2} = -7$$

4) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 + 3x + 5}{x^2 + x}$

Παρατηρούμε ότι πρόκειται για απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Το πολυώνυμο του παρονομαστή παραγοντοποιείται απευθείας: $x^2 + x = x(x+1)$.

Για να παραγοντοποιήσουμε τον αριθμητή εφαρμόζουμε σχήμα Horner με $x=-1$:

Στην 1^η γραμμή του σχήματος καταγράφουμε τους συντελεστές του $P(x)=x^3-x^2+3x+5$ και τη γνωστή ρίζα $x=-1$. Έπειτα κατεβάζουμε τον 1^ο συντελεστή στην τρίτη γραμμή του σχήματος:

1	-1	3	5	-1
1				

Ότι γράφουμε στην τρίτη γραμμή το πολλαπλασιάζουμε με τη γνωστή ρίζα και το αποτέλεσμα το γράφουμε στη δεύτερη γραμμή. Έπειτα προσθέτουμε τα στοιχεία πρώτης και δεύτερης γραμμής και τα γράφουμε στη τρίτη γραμμή.

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία, μέχρι να εξαντλήσουμε όλους τους συντελεστές:

1	-1	3	5	-1
	-1	2	-5	
1	-2	5	0	
Πηλίκο διαίρεσης				Υπόλοιπο

Τελικά βρήκαμε ότι το πηλίκο της διαίρεσης του x^3-x^2+3x+5 με το $x+1$ είναι το :

$\Pi(x)=1x^2-2x+5 = x^2-2x+5$, άρα ο αριθμητής παραγοντοποιείται ως:

$$x^3-x^2+3x+5 = (x+1)(x^2-2x+5)$$

Οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 + 3x + 5}{x^2 + x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x^2 - 2x + 5)}{x \cancel{(x+1)}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x + 5}{x} = \frac{1^2 - 2 \cdot 1 + 5}{1} = 4$$

Επιπλέον ασκήσεις για λύση:

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 - 4x + 4}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 + 2x - 3}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 4x^2 + 3}{x^2 + 2x - 3}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \frac{9}{x}}{x - \frac{3}{x} - 2}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - \frac{8}{x}}{x - \frac{4}{x}}$$